

1.4.3 Složené výroky – konjunkce a disjunkce

Předpoklady: 010402

Složené výroky = souvětí, výroky složené z více jednoduchých výroků.

Výrok: „Číslo 5 je sudé a je prvočíslo.“

Sestavený ze dvou výroků:

1. výrok: Číslo 5 je sudé - NEPRAVDIVÝ,
2. výrok: Číslo 5 je prvočíslo – PRAVDIVÝ.

Celý výrok je nepravdivý, spojka "a" vyjadřuje, že má platit obojí \Rightarrow takový výrok se nazývá **konjunkce**.

Konjunkce

- Konjunkce libovolných výroků a , b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou **a** (nebo **a zároveň někdy i**), zapisujeme $a \wedge b$ a čteme **a a zároveň b**.
- Konjunkce je pravdivá pouze, když jsou pravdivé oba výroky a , b .

Poznámka: Konjunkce souvisí s průnikem $A \cap B$. Průnik obsahuje prvky, které jsou prvky množiny A a zároveň jsou prvky množiny B . Proto je značka průniku \cap podobná značce pro konjunkci \wedge .

Tabulka pravdivostních hodnot

Obsahuje všechny kombinace jednoduchých výroků, ze kterých je složený výrok sestaven, a jeho výsledné hodnoty pravdivosti. Pravda se značí 1, nepravda 0.

a	b	$a \wedge b$	
1	1	1	
1	0	0	
0	1	0	
0	0	0	

Pedagogická poznámka: Tabulku nepromítám, ale kreslím na tabuli se čtyřmi sloupci (výslovně na ně neupozorňuji). Pak si kontrolujeme, kdo si čtvrtého sloupce všiml a napsal ho do svého sešitu.

Pedagogická poznámka: Výroky ve většině následujících příkladů obsahují základní poznatky učiva základní školy z jiných předmětů. Bohužel to přináší diskuse o tom, které výroky jsou pravdivé a které ne. Je zřejmé, že by bylo rychlejší nahradit tyto odkazy trivialitami typu „úterý je druhý den v týdnu“, ale jsem přesvědčený, že pokud mám vychovávat studenty k tomu, aby si pamatovali základní poznatky z matematiky, měl bych po nich chtít, aby si pamatovali základní poznatky i z ostatních předmětů.

Př. 1: Rozhodni, zda jsou pravdivé výroky:

- a) Lužnice je přítok Vltavy a chlorofyl je modré barvivo.
- b) Alexandr Veliký dobyl Perskou říši a Ankara je hlavní město Turecka.

a) Lužnice je přítok Vltavy a chlorofyl je modré barvivo.

Nejdříve musíme zjistit pravdivost výroků, ze kterých je složeno souvětí.
Lužnice je přítok Vltavy. - pravdivý výrok (1)
Chlorofyl je modré barvivo. - nepravdivý výrok (0)
Složený výrok je nepravdivý (nejsou pravdivé oba výroky, ze kterých je složen).
 $1 \wedge 0 = 0$

b)

Nejdříve musíme zjistit pravdivost výroků, ze kterých je složeno souvětí.
Alexandr Veliký dobyl Perskou říši. - pravdivý výrok (1)
Ankara je hlavní město Turecka. - pravdivý výrok (1)
Složený výrok je pravdivý (jsou pravdivé oba výroky, ze kterých je složen).
 $1 \wedge 1 = 1$

Př. 2: Jsou dány výroky.

a: Berounem protéká řeka Ohře.

b: Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka.

c: Václav III byl synem Václava II.

d: Kompas byl vynalezen v Číně.

a) Sestav z těchto výroků pravdivou a nepravdivou konjunkci.

b) Sestav pravdivou konjunkci s výrokem *a* (Berounem protéká řeka Ohře.)

Určíme pravdivostní hodnotu výroků:

<i>a:</i> Berounem protéká řeka Ohře. ...	0	
<i>b:</i> Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka. ...	1	
<i>c:</i> Václav III byl synem Václava II. ...	1	
<i>d:</i> Kompas byl vynalezen v Číně. ...	1	

a)

Pravdivá konjunkce: Musí být sestavena pouze z pravdivých výroků \Rightarrow jakákoliv konjunkce sestavená z výroků *b, c, d*.

Například: $b \wedge c$: Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka a Václav III byl synem Václava II.

Nepravdivá konjunkce: Musí obsahovat alespoň jeden nepravdivý výrok:

Například: $a \wedge b$: Berounem protéká řeka Ohře a Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka.

b) pravdivá konjunkce s výrokem *a*

Všechno v konjunkci musí být pravda, ale výrok *a* je nepravdivý \Rightarrow musíme výrok *a* znegovat.

Například: $\neg a \wedge d$: Berounem neprotéká řeka Ohře a kompas byl vynalezen v Číně.

Pedagogická poznámka: Bod b) předchozího příkladu je tak trochu snahou o navození situace, kdy si studenti musí rozmyslet, co všechno mají opravdu k dispozici, protože jednoduchá a běžná cesta k řešení neexistuje.

Př. 3: Rozhodni o pravdivosti výroku: „Napoleon byl generál a francouzský císař.“

Dva výroky:

a: Napoleon byl generál. ... 1

b: Napoleon byl francouzský císař. ... 1

Máme výrok $1 \wedge 1 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Poznámka: Předchozí výrok je ukázkou zkracování složených výroků do jediné věty. I přesto zůstává výrok pořád složeným.

Př. 4: Rozhodni, zda je pravdivý výrok: Sofokles, Aischylos a Jaromír Jágr byli slavní řečtí starověcí dramatici.

Jde výrok složený ze tří výroků:

a : Sofokles byl slavný řecký starověký dramatik ... pravda (1)

b : Aischylos byl slavný řecký starověký dramatik ... pravda (1)

c : Jaromír Jágr byl slavný řecký starověký dramatik ... nepravda (0)

Celý výrok má tvar $(a \wedge b) \wedge c$, dosadím pravdivosti výroků $(1 \wedge 1) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0$.

Výrok je nepravdivý.

Př. 5: Odhadni pravdivost výroku: „Číslo 6 je prvočíslo nebo číslo 6 je menší než 10.

První výrok je nepravdivý, druhý je pravdivý, spojku **nebo** používáme, když nám stačí pravdivost jedné z možností \Rightarrow celý výrok je zřejmě pravdivý..

Disjunkce

- Disjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou nebo. Píšeme $a \vee b$ čteme – **a nebo b**
- Disjunkce je pravdivá, když je alespoň jeden z výroků a, b pravdivý (umyješ nádobí nebo vytřeš – stačí udělat jedno, ale je možné udělat obojí).

Poznámka: Disjunkce souvisí se sjednocením $A \cup B$. Sjednocení obsahuje prvky, které jsou prvky množiny A nebo jsou prvky množiny B . Proto je značka sjednocení \cup podobná značce pro disjunkci \vee .

Př. 6: K tabulce pravdivostních hodnot pro konjunkci přidej sloupec s pravdivostními hodnotami disjunkce $a \vee b$.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Př. 7: Rozhodni o pravdivosti výroku: Václav Havel byl prezidentem ČR nebo mluvčím Charty 77.

Dva výroky:

a : Václav Havel byl prezidentem ČR. ... 1

b : Václav Havel byl mluvčím Charty 77. ... 1

Máme výrok $1 \vee 1 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Př. 8: Jsou dány výroky (stejně jako v příkladu 2).

a : Berounem protéká řeka Ohře.

b : Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka.

c : Václav III byl synem Václava II.

d : Kompas byl vynalezen v Číně.

a) Sestav z těchto výroků pravdivou a nepravdivou disjunkci bez použití negace.

b) Sestav nepravdivou disjunkci ze všech čtyř uvedených výroků.

Určíme pravdivostní hodnotu výroků:

a : Berounem protéká řeka Ohře. ... 0

b : Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka. ... 1

c : Václav III. byl synem Václava II. 1

d : Kompas byl vynalezen v Číně. ... 1

a)

Pravdivá disjunkce:

Musí obsahovat alespoň jeden pravdivý výrok \Rightarrow jakákoliv disjunkce sestavená z výroků a , b , c , d .

Například: $b \vee c$: Nejvyšší horou Krkonoš je Sněžka nebo Václav III byl synem Václava II.

Nepravdivá disjunkce:

Musí obsahovat pouze nepravdivé výroky \Rightarrow musím použít pouze výrok a :

$a \vee a$: Berounem protéká řeka Ohře nebo Berounem protéká řeka Ohře.

b) nepravdivá disjunkce ze všech čtyř uvedených výroků

Všechny výroky musí být nepravda, co je pravdivé musíme znegovat: $a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d$

Berounem protéká řeka Ohře nebo nejvyšší horou Krkonoš není Sněžka nebo Václav III.

nebyl synem Václava II. nebo kompas nebyl vynalezen v Číně.

Pedagogická poznámka: Sestavení nepravdivé disjunkce v bodě a) považuje většina studentů za nemožné, ani je nenapadne, že by ve složeném výroku mohl vystupovat dvakrát jeden a ten samý výrok. Připomínám studentům v souvislosti s tímto příkladem, že jsme v žádném případě nezakázali při sestavování složeného výroku použít jeden výrok vícekrát, přesto naprostá většina z nich toto omezení nevědomě dodržovala. Z podobných omezení pramení nemalá část chyb v matematice.

Př. 9: Pomocí pravdivostní tabulky rozhodni o pravdivosti výroku $(\neg a \wedge b) \vee a$.

a	b	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$(\neg a \wedge b) \vee a$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Př. 10: Pomocí pravdivostní tabulky rozhodni o pravdivosti výroku $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$\neg a \wedge \neg b$	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$
1	1	0	0	1	0	1

1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Př. 11: Petáková:

strana 10/cvičení 3

strana 10/cvičení 4

strana 10/cvičení 7 a)

Shrnutí: Spojky *a* a *nebo* se v matematice používají při sestavování složených výroků analogicky s běžným jazykem.